SPLAY TREES

- GLI SPLAY TREES IMPLEMENTANO M OPERAZIONI CONSECUTIVE DI
  - RICERCA
  - INSERIMENTO
  - CANCELLAZIONE

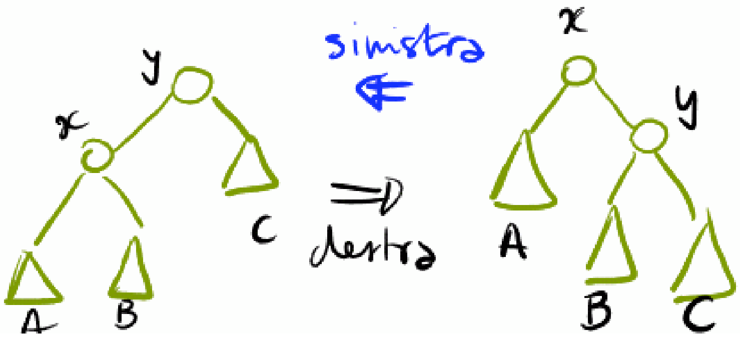
  IN TEMPO $O(M \log N)$, DOVE N E' IL NUMERO DI INSERIMENTI

- IN ALTRE PAROLE CIASCUNA DELLE M OPERAZIONI VIENE ESEGUITA IN TEMPO AMMORTIZZATO $O(\log N)$

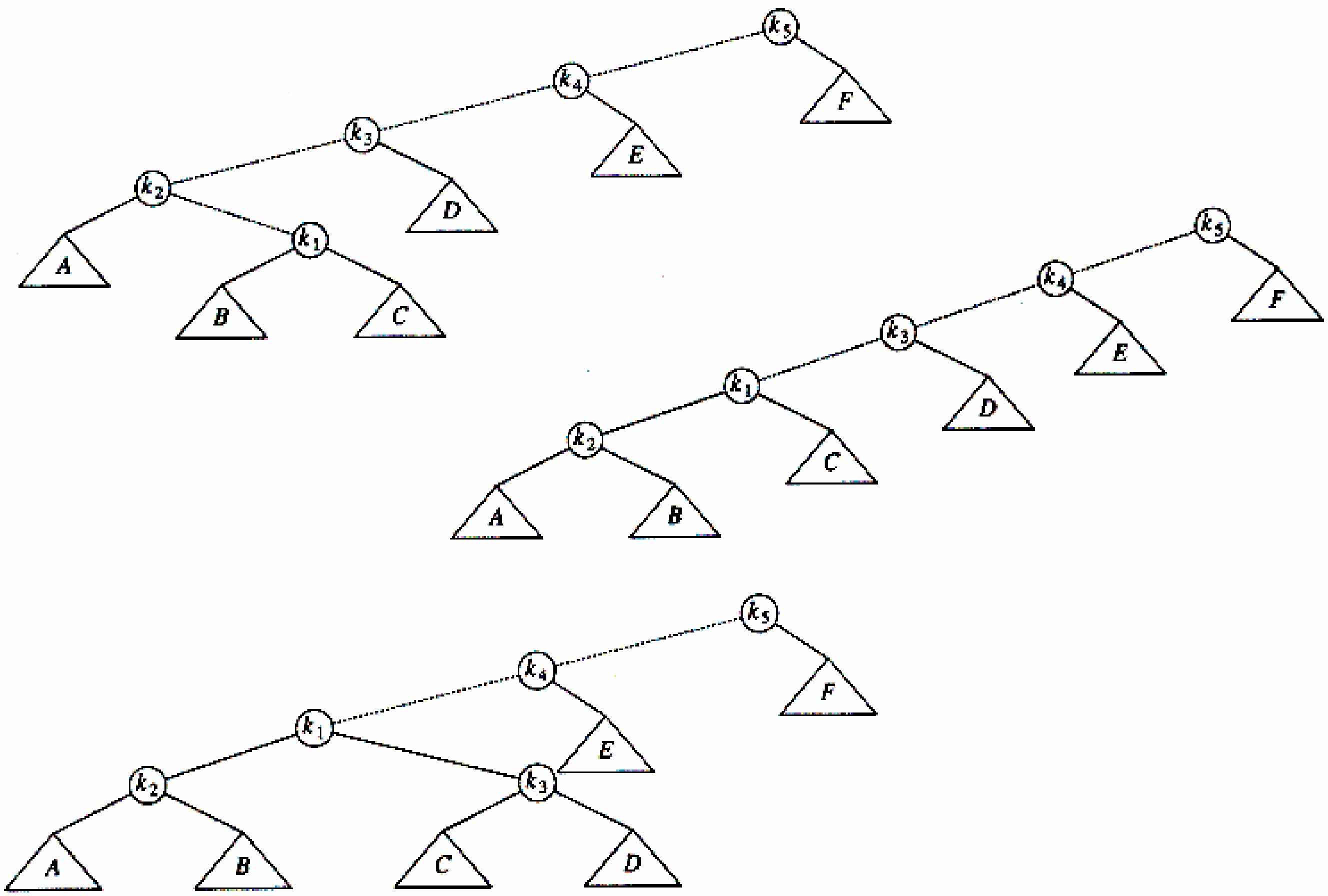
IDEA: PER QUANTO POSSIBILE AVVICINARE ALLA RADICE I NODI CHE SI INCONTRANO DURANTE UN ACCESSO

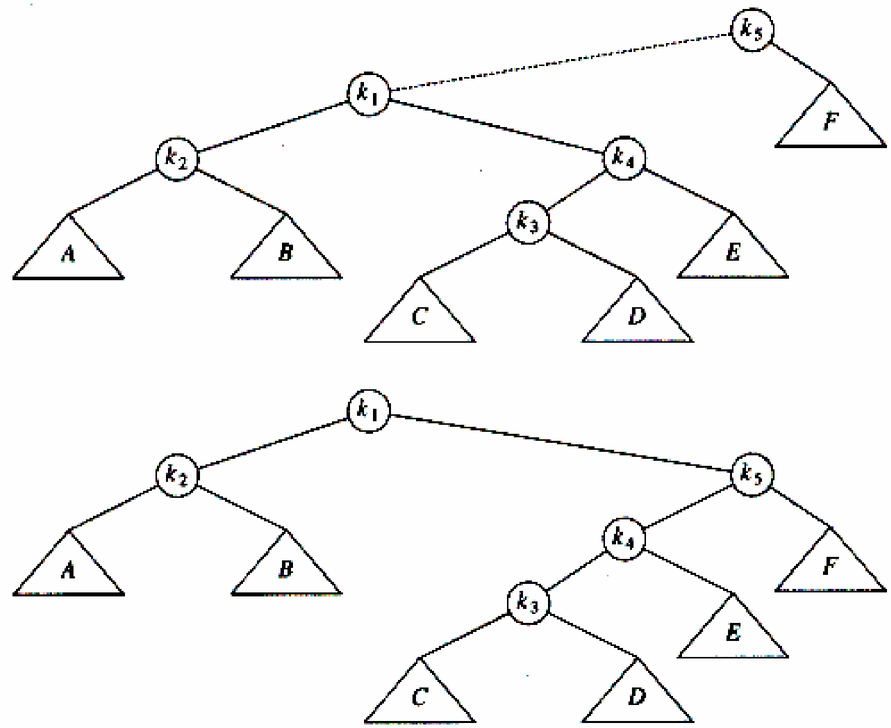
UNA SEMPLICE IDEA (CHE NON FUNZIONA)

EFFETTUARE TUTTE LE POSSIBILI ROTAZIONI, DAL BASSO VERSO L'ALTO, LUNGO IL CAMMINO DI ACCESSO



ESEMPIO (ACCESSO AL NODO k_1)





k_5
k_1
k_2
k_4
k_3
A
B
C
D
E
F
k_1
k_2
k_5
k_4
k_3
A
B
C
D
E
F

ESEMPIO

SI CONSIDERI LA SEQUENZA DELLE SEGUENTI OPERAZIONI:

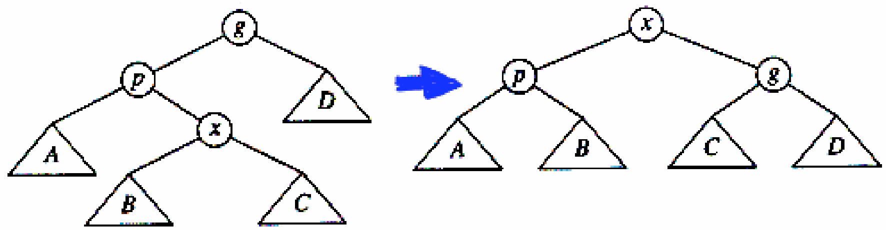
INSERT(1)
INSERT(2)
⋮
INSERT(N)

$\Theta(N)$

SEARCH(1)	N-1	ROTAZ.
SEARCH(2)	N-1	"
SEARCH(3)	N-2	"
SEARCH(4)	N-3	"
⋮		
SEARCH(N)	1	"

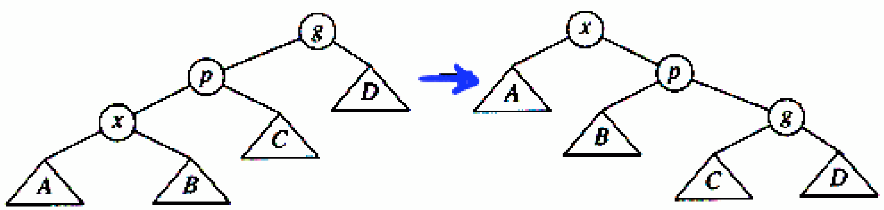
$\Theta(N^2)$

SPLAY TREES

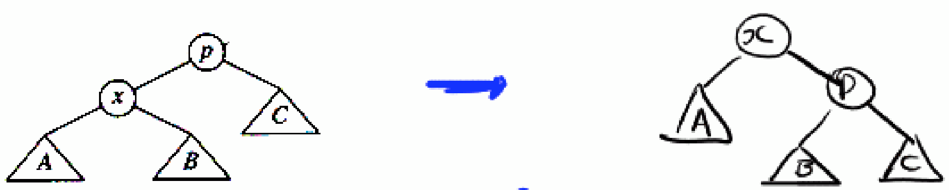


ZIG-ZAG

+ SIMMETRICHE



ZIG-ZIG



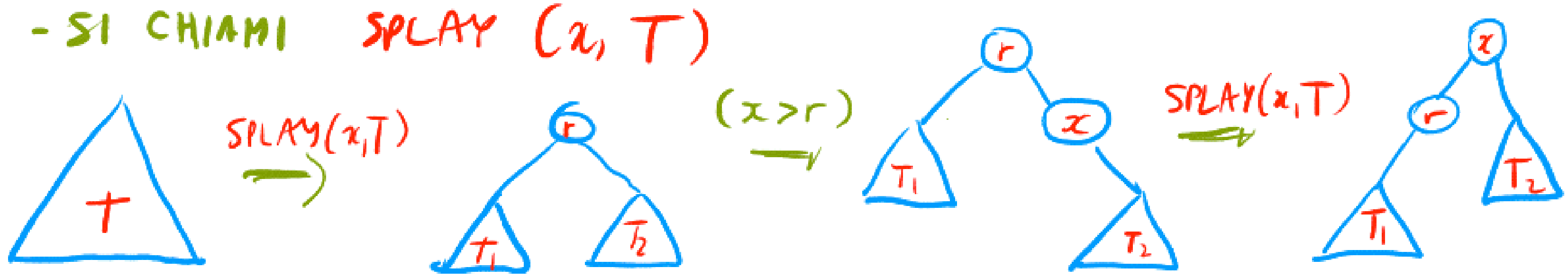
ZIG (x NON HA NONNO)

SPLAY (x, T)

- SI CERCHI x SU T MEDIANTE RICERCA BINARIA
- A PARTIRE DAL NODO OVE LA RICERCA SI E' FERMATA E PROCEDENDO VERSO LA RADICE, SI APPLICHINO LE ROTAZIONI DI TIPO ZIG, ZIG-ZAG O ZIG-ZIG NECESSARIE

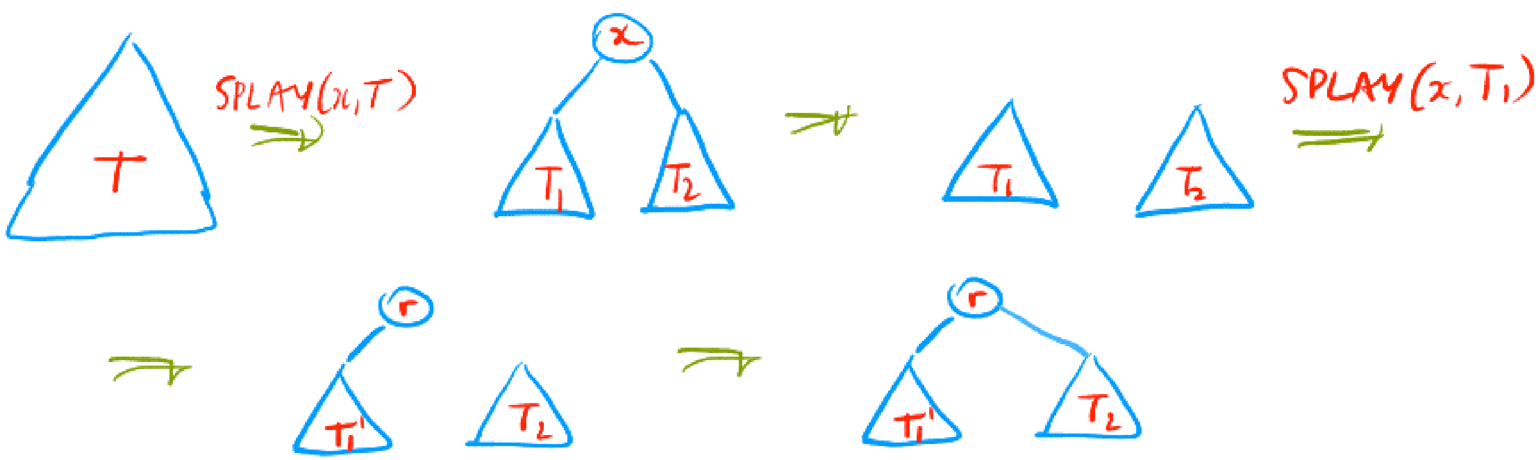
INSERT (x, T)

- SI CHIAMI SPLAY (x, T)
- SI INSERISCA IL NUOVO NODO x
- SI CHIAMI SPLAY (x, T)



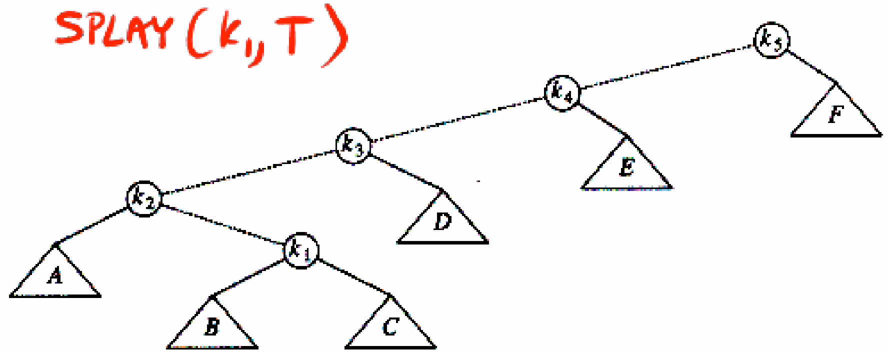
DELETE(x, T)

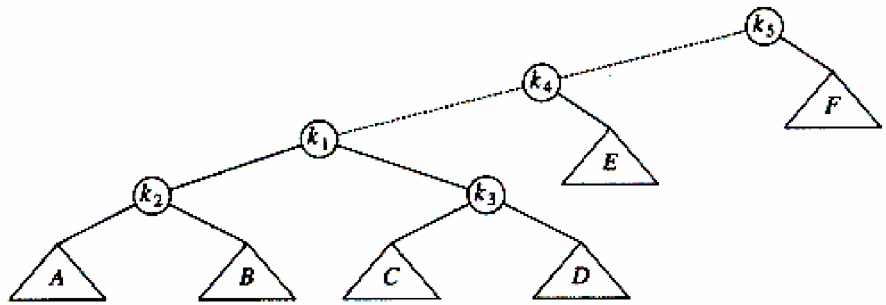
- SPLAY(x, T)
- SI CANCELLI IL NODO x OTTENENDO DUE ALBERI T_1 E T_2
- SPLAY(x, T_1); SIA r LA NUOVA RADICE
- SI PONGA LA RADICE DI T_2 COME FIGLIO DESTRO DEL NODO r

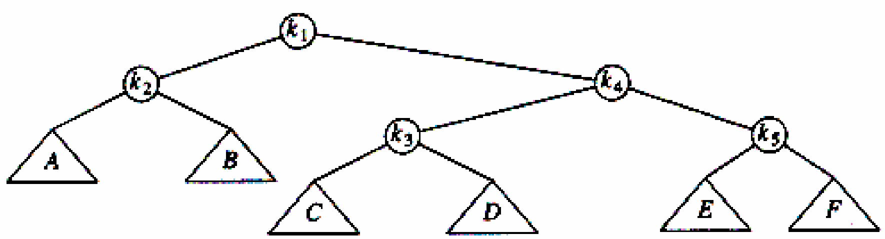


ESEMPIO

SPLAY(k_1, T)

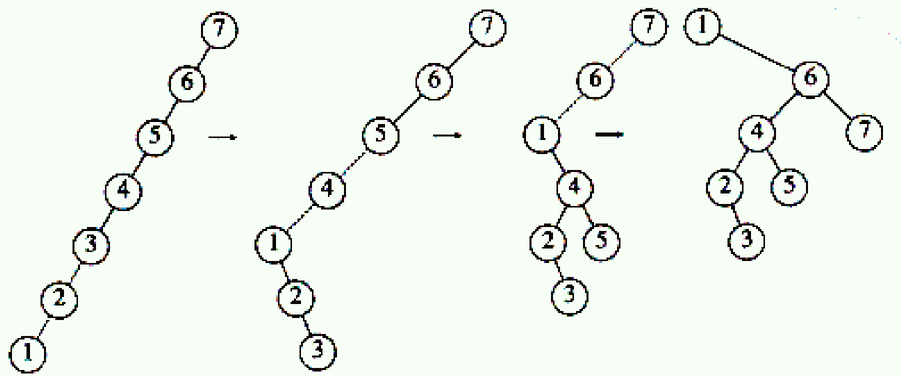




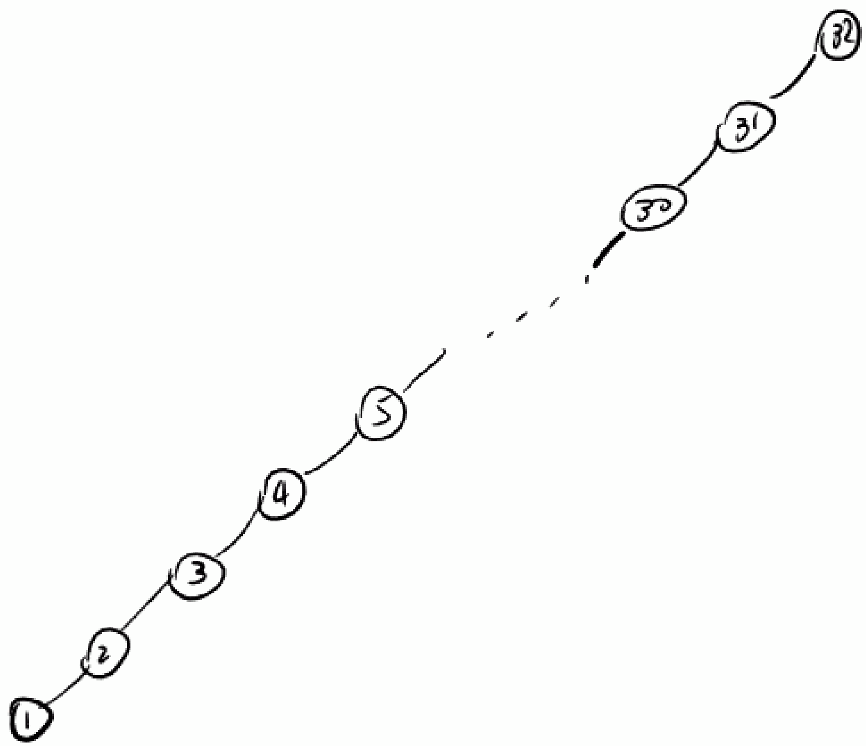


ESEMPIO

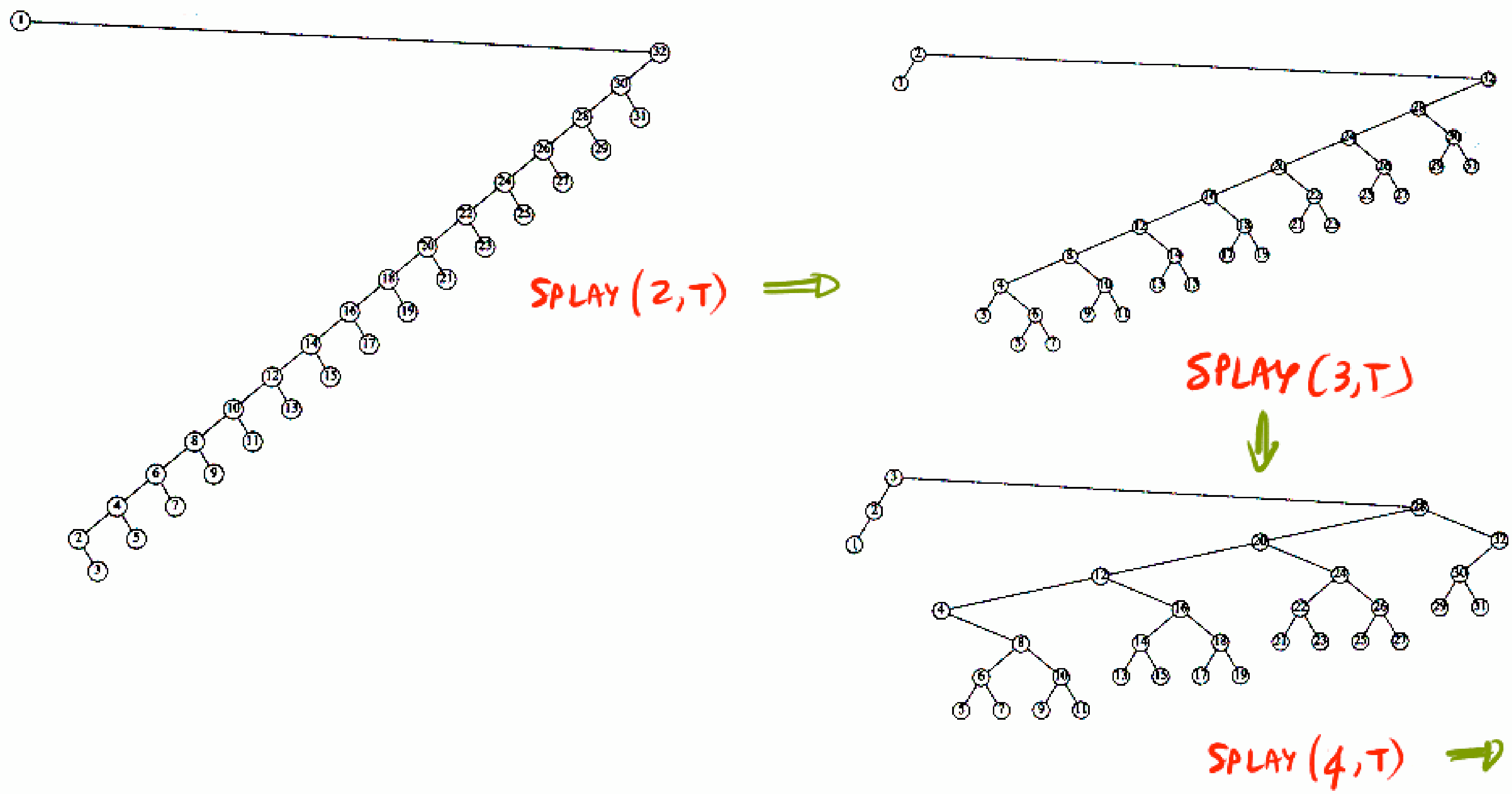
SPLAY (1, T)

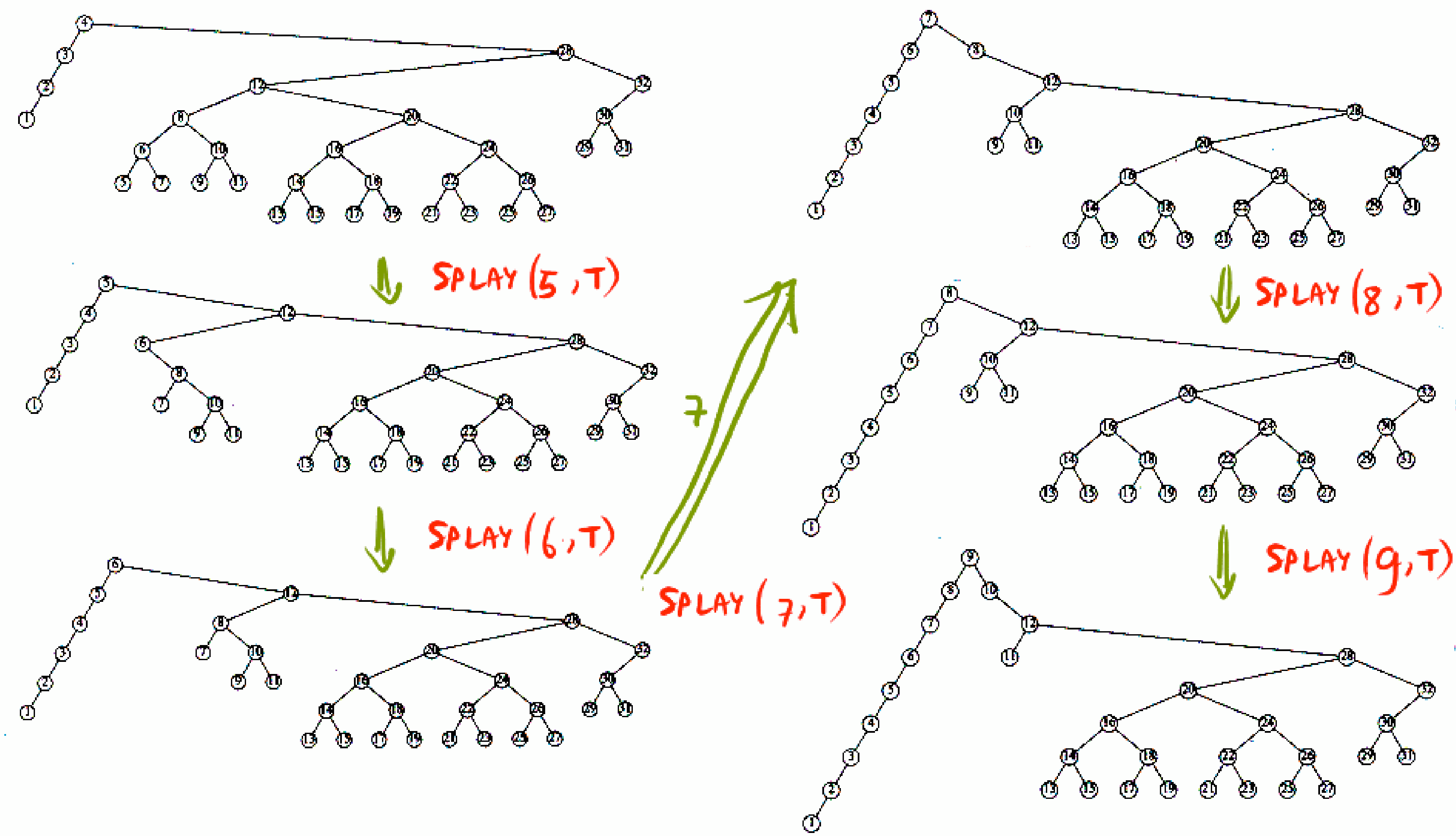


ESEMPIO



SPLAY (1, T) ⟹


SPLAY (2,T)
SPLAY (3,T)
SPLAY (4,T)


SPLAY (5 , T)
SPLAY (6 , T)
7
SPLAY (7 , T)
SPLAY (8 , T)
SPLAY (9, T)

ANALISI AMMORTIZZATA DELL'OPERAZIONE SPLAY

COSTI DELLE OPERAZIONI ELEMENTARI

ZIG	1 ROTAZIONE
ZIG-ZAG	2 ROTAZIONI
ZIG-ZIG	2 ROTAZIONI

PONIAMO:

$S(v) =_{df}$ # NODI DEL SOTTOALBERO CON RADICE v

$R(v) =_{df} \lg S(v)$ (rango di v)

$$\Phi(T) =_{df} \sum_{v \in T} R(v)$$

- SIA T_0 UN ALBERO VUOTO. SI HA

$$\Phi(T_0) = \sum_{v \in T_0} R(v) = 0$$

- SIA T UN ALBERO QUALSIASI

$$\Phi(T) = \sum_{v \in T} R(v) = \sum_{v \in T} \lg S(v) \geq 0 = \Phi(T_0)$$

- PERTANTO POSSIAMO UTILIZZARE IL POTENZIALE $\Phi(T)$ PER CALCOLARE UN UPPER BOUND AL COSTO REALE DI M OPERAZIONI (SPLAY, INSERT, DELETE) DI CUI N SONO INSERT

LEMMA

SIANO $a, b \in \mathbb{N}^+$ E SIA $c \geq a+b$.

ALLORA $\lg a + \lg b \leq 2\lg c - 2$.

DIM.

SI OSSERVI

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$c \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{(POICHE' } c \geq a+b\text{)}$$

$$\lg c \geq 1 + \frac{1}{2}(\lg a + \lg b) \quad \text{(PRENDENDO I LOGARITMI DI AMBO I MEMBRI)}$$

$$2\lg c - 2 \geq \lg a + \lg b. \blacksquare$$

TEOREMA IL COSTO AMMORTIZZATO DELL'OPERAZIONE SPLAY(x, T) È AL PIÙ $3\left(R(\mathrm{root}(T)) - R(x)\right) + 1$.

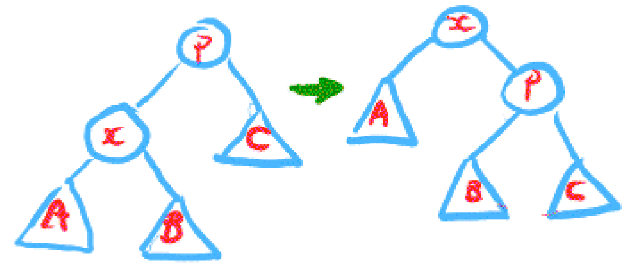
DIM. CALCOLIAMO PER INIZIARE IL COSTO AMMORTIZZATO DI UNA OPERAZIONE DI TIPO ZIG, ZIG-ZAG, ZIG-ZIG.

NOTAZIONE

INDICHIAMO CON $S_i(x)$ E $S_f(x)$ IL NUMERO DI NODI NEL SOTTOALBERO DI RADICE x PRIMA E DOPO L'OPERAZIONE IN ESAME.

ANALOGAMENTE PER $R_i(x)$ E $R_f(x)$.

CASO ZIG



COSTO REALE = 1

$$\Delta\Phi = R_f(x) + R_f(p) - R_i(x) - R_i(p)$$

SI OSSERVI CHE

$S_i(p) \geq S_f(p) \longrightarrow R_i(p) \geq R_f(p) \longrightarrow \Delta\Phi \leq R_f(x) - R_i(x)$

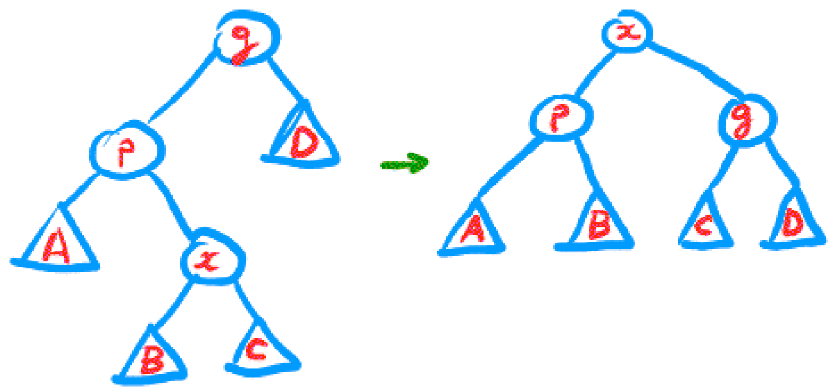
$S_f(x) \geq S_i(x) \longrightarrow R_f(x) - R_i(x) \geq 0 \longrightarrow \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x))$

$$\hat{C}_{ZIG} = 1 + \Delta\Phi \leq 1 + 3(R_f(x) - R_i(x))$$

CASO ZIG-ZAG

COSTO REALE = 2

$$\Delta\Phi = R_f(x,p,g) - R_i(x,p,g)$$



SI OSSERVI QUANTO SEGUE:

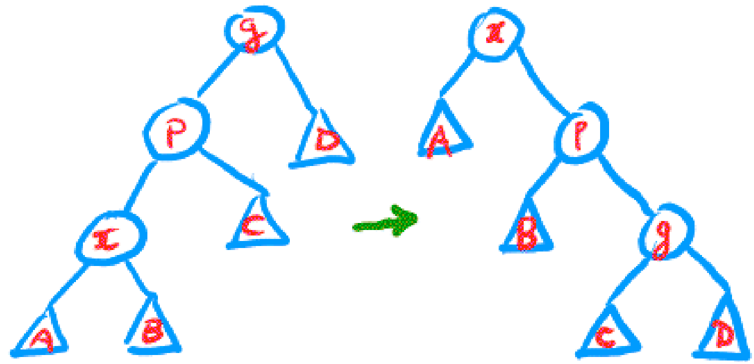
- $S_f(x) = S_i(g) \rightarrow R_f(x) = R_i(g) \rightarrow \Delta\Phi = R_f(p,g) - R_i(x,p)$
- $S_i(p) \geq S_i(x) \rightarrow R_i(p) \geq R_i(x) \rightarrow \Delta\Phi \leq R_f(p,g) - 2R_i(x)$
- $S_f(p) + S_f(g) \leq S_f(x) \rightarrow R_f(p) + R_f(g) \leq 2R_f(x) - 2$
  $\rightarrow \Delta\Phi \leq 2(R_f(x) - R_i(x)) - 2$
- $S_f(x) \geq S_i(x) \rightarrow R_f(x) - R_i(x) \geq 0 \rightarrow \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x)) - 2$

$$\hat{C}_{ZIG-ZAG} = 2 + \Delta\Phi \leq 2 + 3(R_f(x) - R_i(x)) - 2 = 3(R_f(x) - R_i(x)).$$

CASO ZIG-ZIG

COSTO REALE = 2

$\Delta\Phi = R_f(x,p,g) - R_i(x,p,g)$



SI OSSERVI CHE:

- $S_f(x) = S_i(g) \rightarrow R_f(x) = R_i(g) \rightarrow \Delta\Phi = R_f(p,g) - R_i(x,p)$
- $S_f(x) \geq S_f(p) \rightarrow R_f(x) \geq R_f(p) \rightarrow \Delta\Phi \leq R_f(x,g) - R_i(x,p)$
- $S_i(x) + S_f(g) \leq S_f(x) \longrightarrow R_i(x) + R_f(g) \leq 2R_f(x) - 2$

$\rightarrow \Delta\Phi \leq R_f(x) + R_f(g) - 2R_i(x) - R_i(p) + R_i(x) \leq 3R_f(x) - 2 - 2R_i(x) - R_i(p)$

- $S_i(x) \leq S_i(p) \longrightarrow R_i(x) \leq R_i(p) \rightarrow \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x)) - 2$

$\hat{C}_{ZIG-ZIG} = 2 + \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x))$

RIASSUMENDO

$$\hat{c}_{ZIG} \leq 3(R_f(x) - R_i(x)) + 1$$

$$\hat{c}_{ZIG-ZAG}, \ \hat{c}_{ZIG-ZIG} \leq 3(R_f(x) - R_i(x))$$

$$\hat{c}_{SPLAY} = \sum_{j=1}^{k} \hat{c}_j \leq \sum_{j=1}^{k} 3(R_f^{(j)}(x) - R_i^{(j)}(x)) + 1$$

MA $R_f^{(j)}(x) = R_i^{(j+1)}(x)$ QUINDI

$$\hat{c}_{SPLAY} \leq \sum_{j=1}^{k} 3(R_i^{(j+1)}(x) - R_i^{(j)}(x)) + 1$$

$$\leq 3(R_i^{(k+1)}(x) - R_i^{(1)}(x)) + 1$$

$$= 3(R(root(T)) - R(x)) + 1$$

SI OSSERVI CHE

$$3\,(R(root(T)) - R(x)) + 1 = O(\lg |T|)$$

TOP-DOWN SPLAY TREES

- NEI LUCIDI PRECEDENTI ABBIAMO ILLUSTRATO I COSIDDETTI BOTTOM-UP SPLAY TREES
- I BOTTOM-UP SPLAY TREES SONO PIÙ FACILI DA ANALIZZARE, MA DAL PUNTO DI VISTA PRATICO PRESENTANO ALCUNI PROBLEMI IMPLEMENTATIVI (E QUINDI DI EFFICIENZA)
- INFATTI LE ROTAZIONI ZIG, ZIG-ZIG E ZIG-ZAG HANNO LUOGO BOTTOM-UP E QUINDI OCCORRE
  - MEMORIZZARE IL CAMMINO DALLA RADICE AL NODO CERCATO, OPPURE
  - MANTENERE PER CIASCUN NODO UN PUNTATORE AL PADRE

- LA VARIANTE TOP-DOWN CONSENTE DI RISOLVERE EGREGIAMENTE IL PRECEDENTE PROBLEMA, PUR MANTENENDO UN COSTO AMMORTIZZATO LOGARITMICO PER SPLAY

- L'IDEA DI BASE E' LA SEGUENTE:
  - MENTRE SI PROCEDE ALLA RICERCA DI UN DATO NODO, SI TRATTINO OPPORTUNAMENTE I NODI INCONTRATI NONCHE' I LORO SOTTOALBERI.
  - NEL CORSO DELL'OPERAZIONE DI SPLAY, L'ALBERO RISULTERA' SPEZZATO IN TRE PARTI:
    - UN ALBERO L
    - UN ALBERO T' DI RADICE UN CERTO NODO x
    - UN ALBERO R

    TALI CHE $L \leq T' \leq R$ (NEL SENSO DELLE CHIAVI CONTENUTE IN ESSI)
  - INIZIALMENTE x E' LA RADICE DEL NOSTRO ALBERO T ED L E R SONO VUOTI

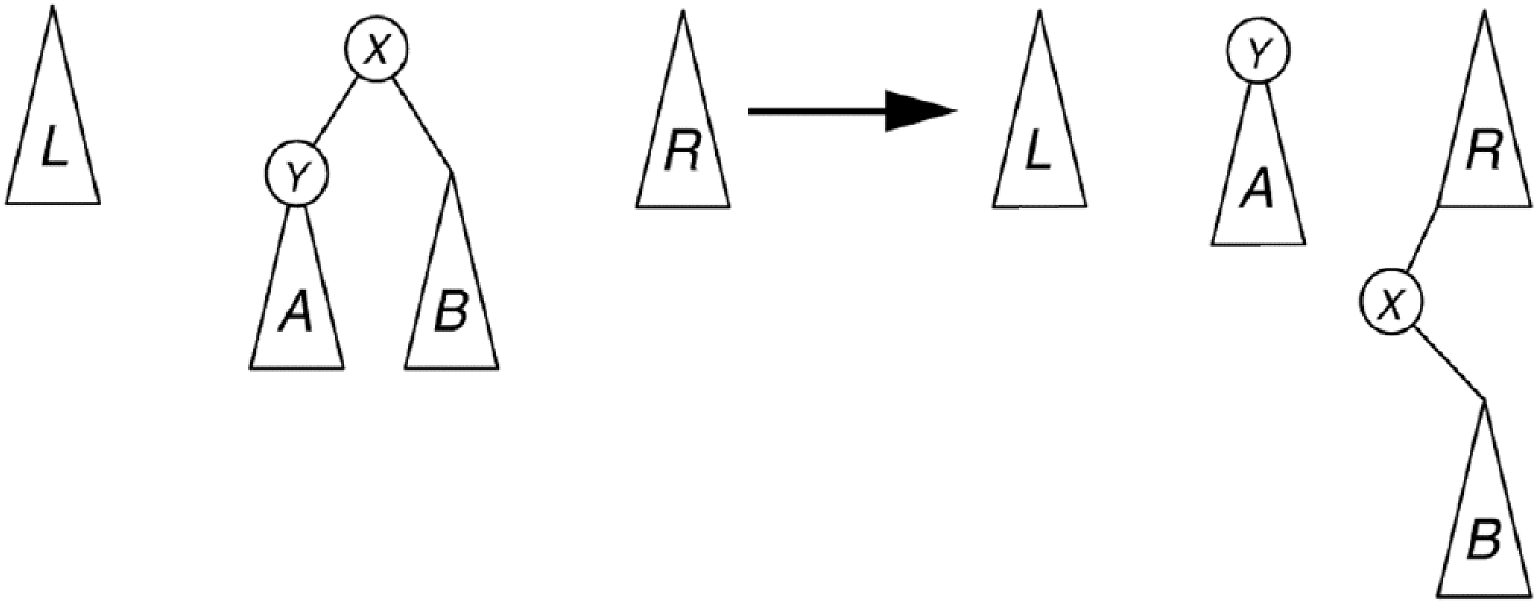
- SUCCESSIVAMENTE, SCENDIAMO DI DUE LIVELLI PER VOLTA, SE POSSIBILE, ALLA RICERCA DEL NOSTRO NODO ED APPLICHIAMO L'OPERAZIONE DI ZIG-ZAG O ZIG-ZIG (DESCRITTE SOTTO) A SECONDA DELLA SITUAZIONE.

  NEL CASO SI POSSA SCENDERE DI UN SOLO LIVELLO, SI APPLICHERÀ L'OPERAZIONE ZIG

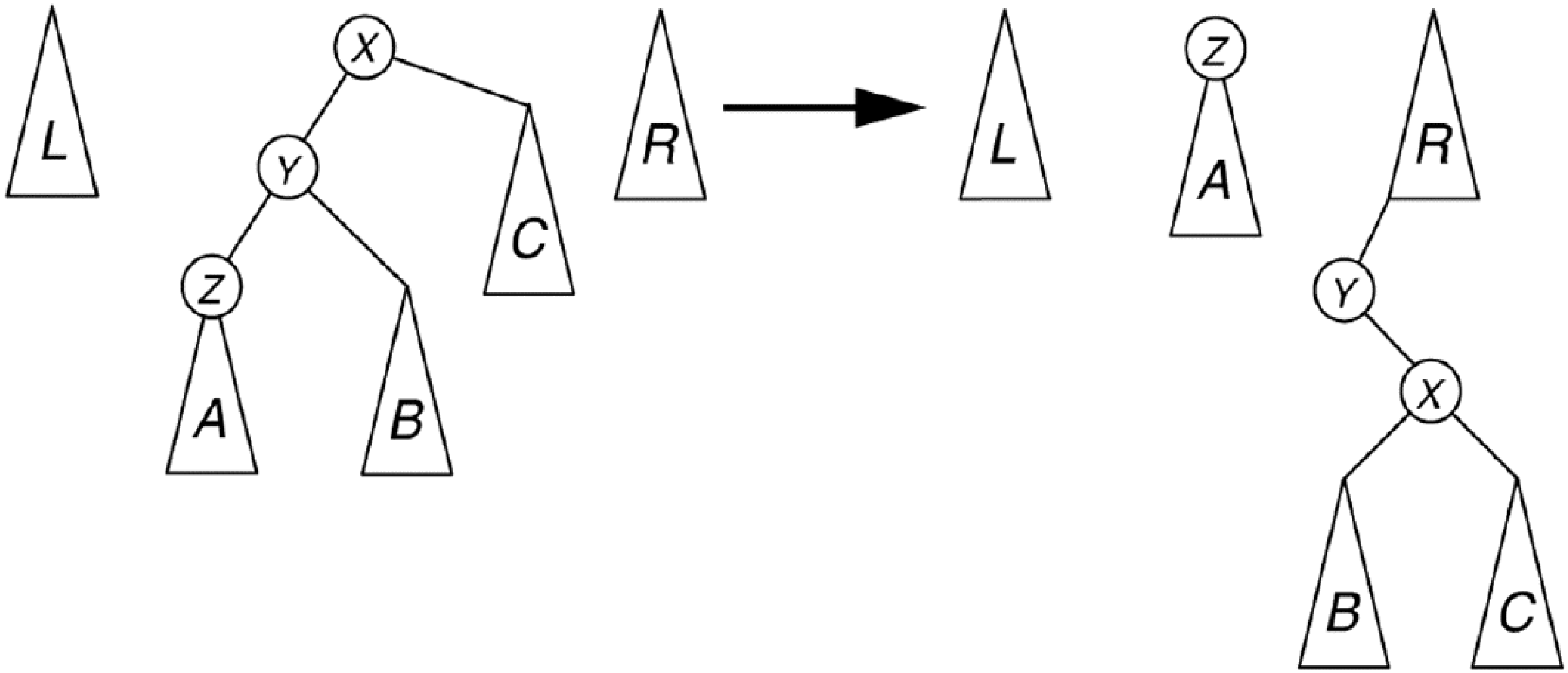
- LE OPERAZIONI ZIG, ZIG-ZIG E ZIG-ZAG HANNO L'EFFETTO DI AGGIORNARE I TRE ALBERI L, T' E R MANTENENDO L'INVARIANTE $L \leq T' \leq R$

- ALLA FINE, I TRE ALBERI VENGONO RIASSEMBLATI IN UN UNICO ALBERO

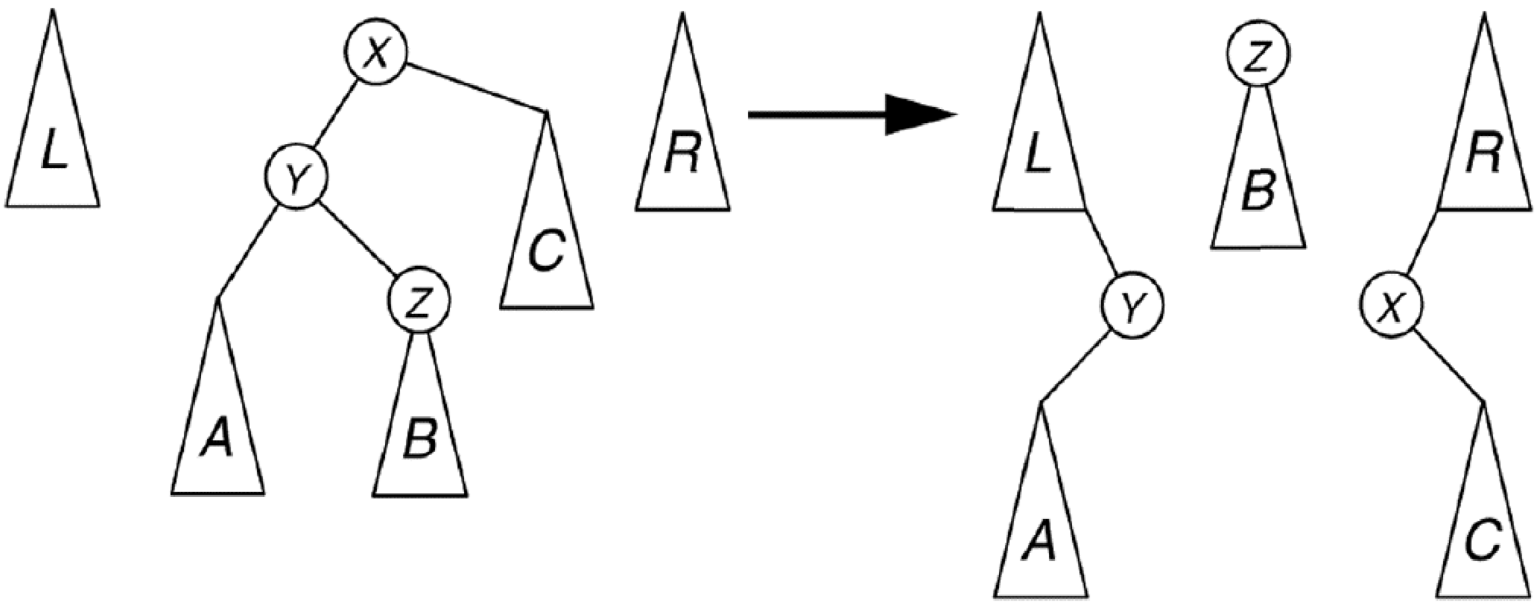
OPERAZIONE ZIG



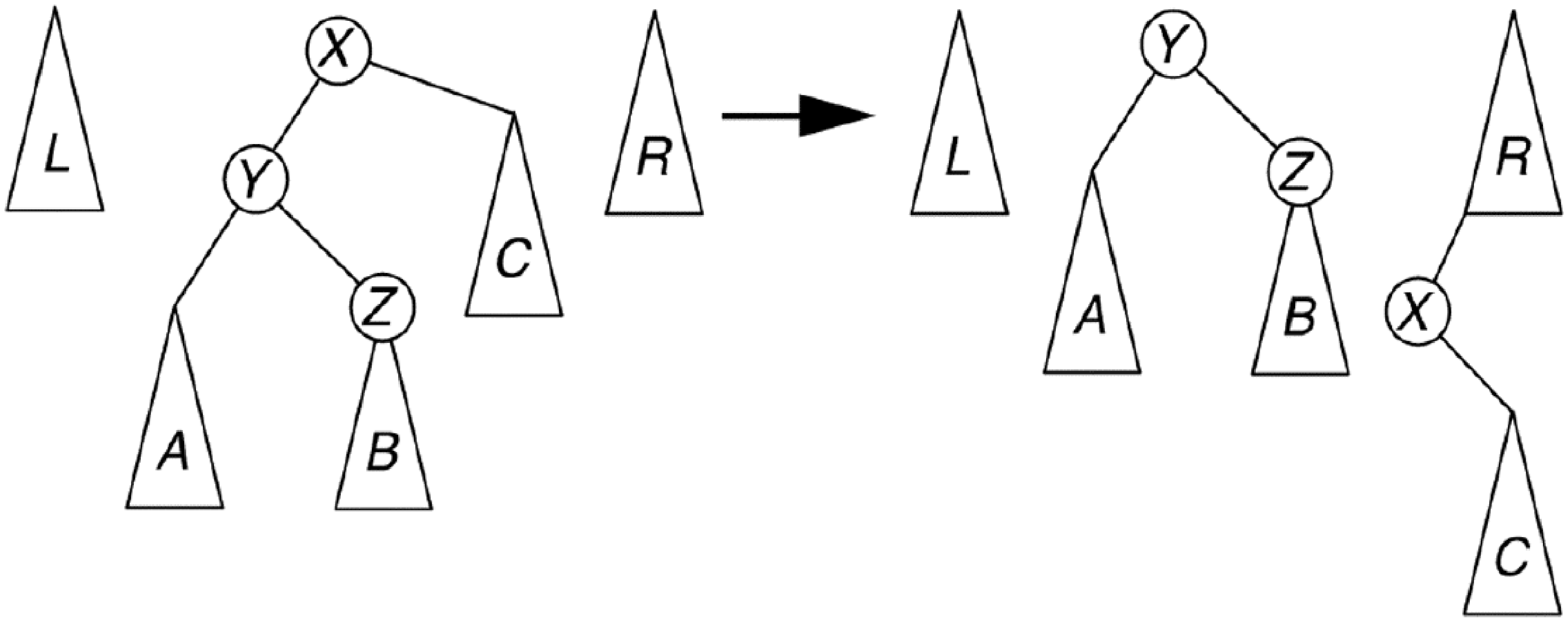
OPERAZIONE ZIG-ZIG



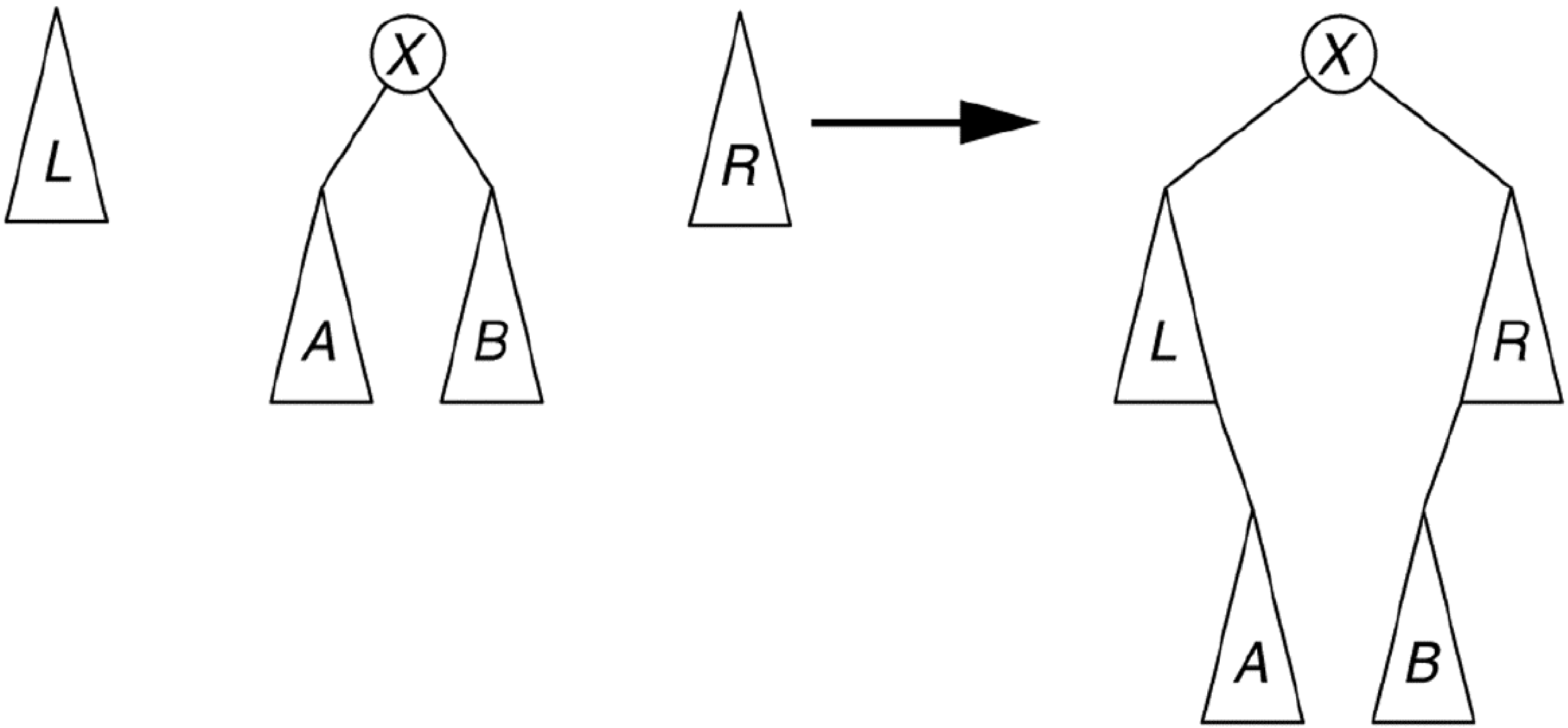
OPERAZIONE ZIG-ZAG



OPERAZIONE ZIG-ZAG (SEMPLIFICATA)



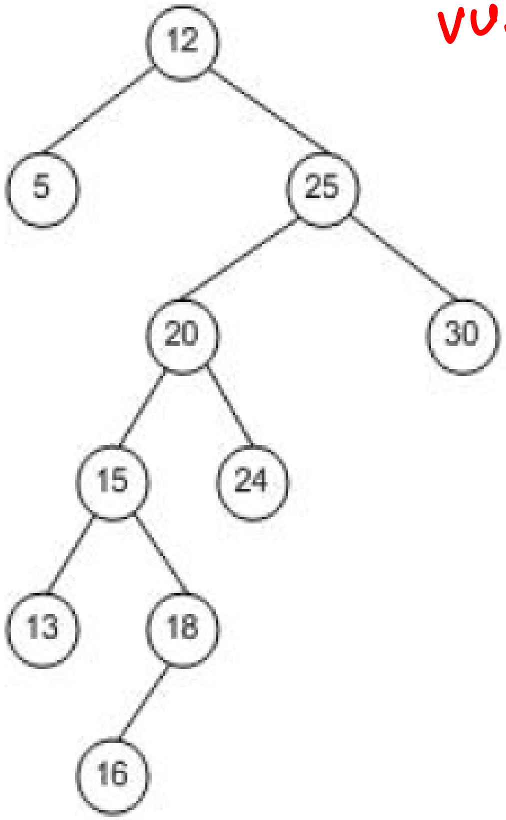
RIASSEMBLAGGIO FINALE



ESEMPIO

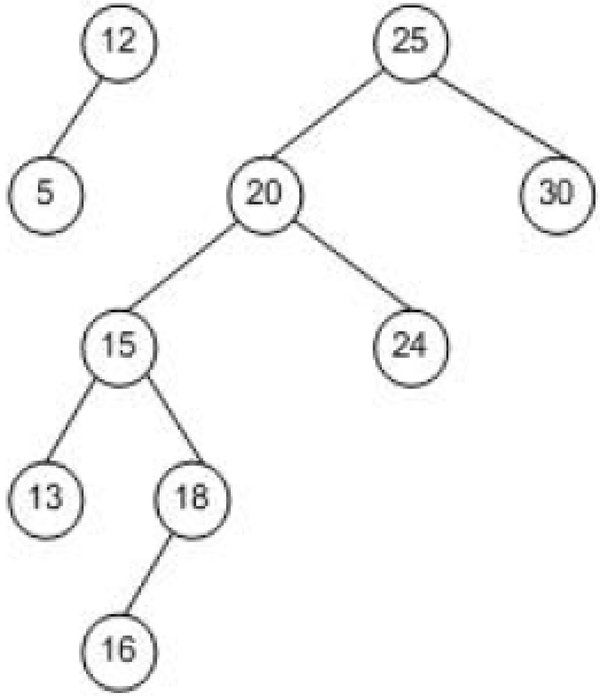
SPLAY (19)

VUOTO



VUOTO

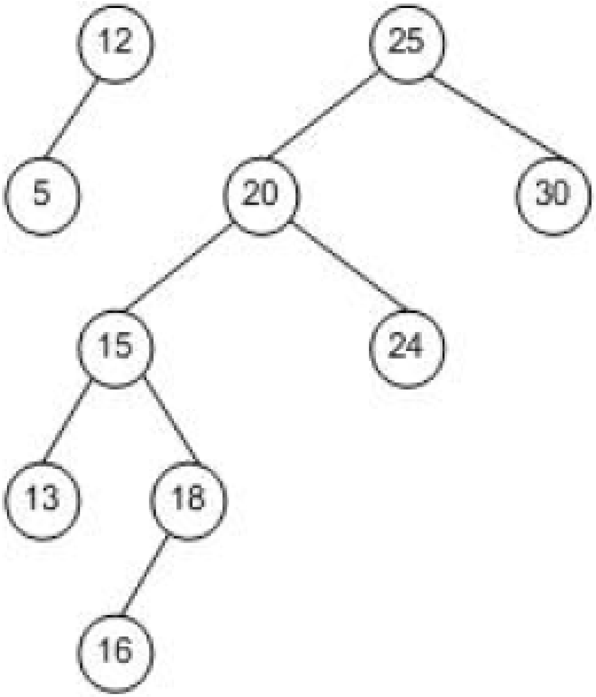
ZIG-ZAG
(SEMPLIFICATO)



VUOTO

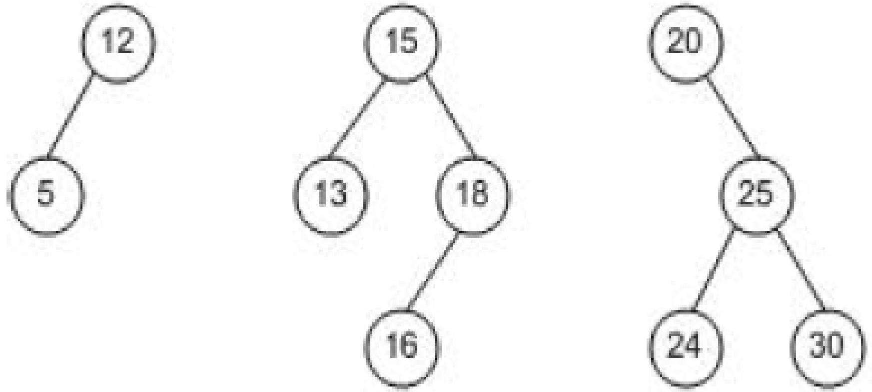
ESEMPIO

SPLAY (19)



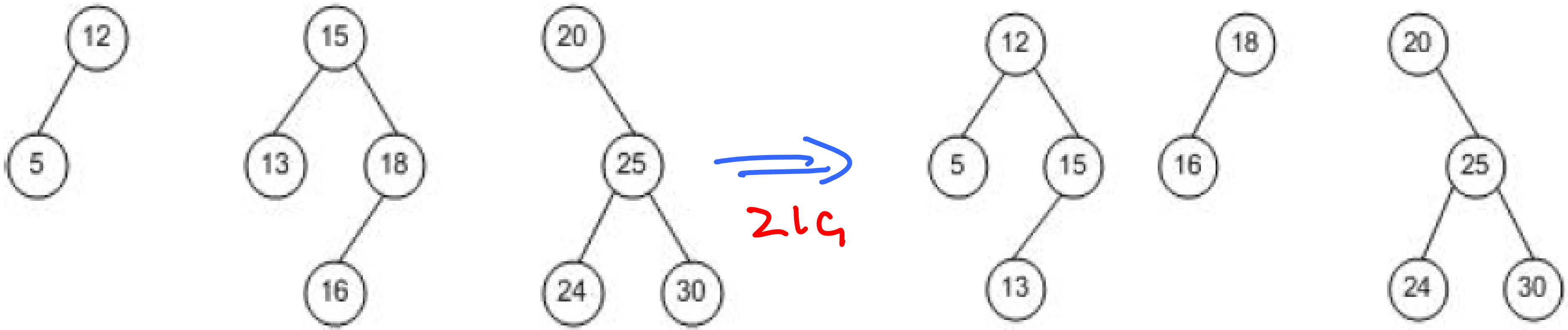
VUOTO

ZIG-ZIG



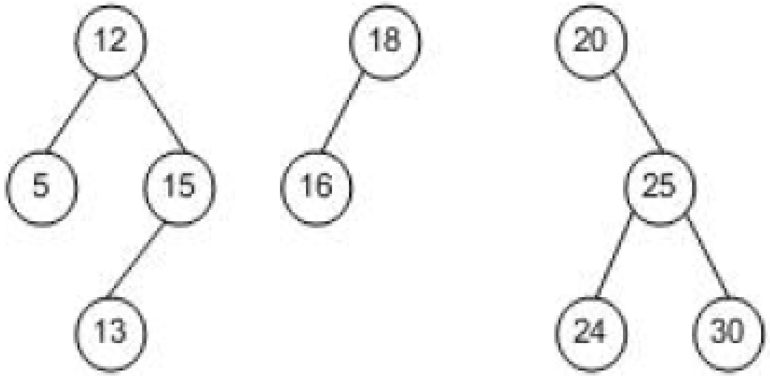
ESEMPIO

SPLAY (19)

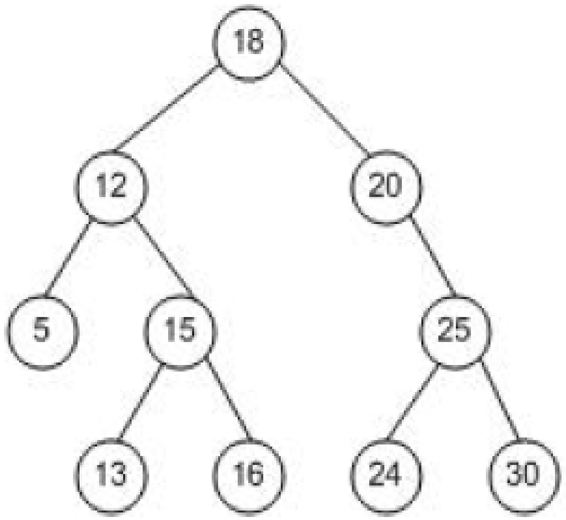


ESEMPIO

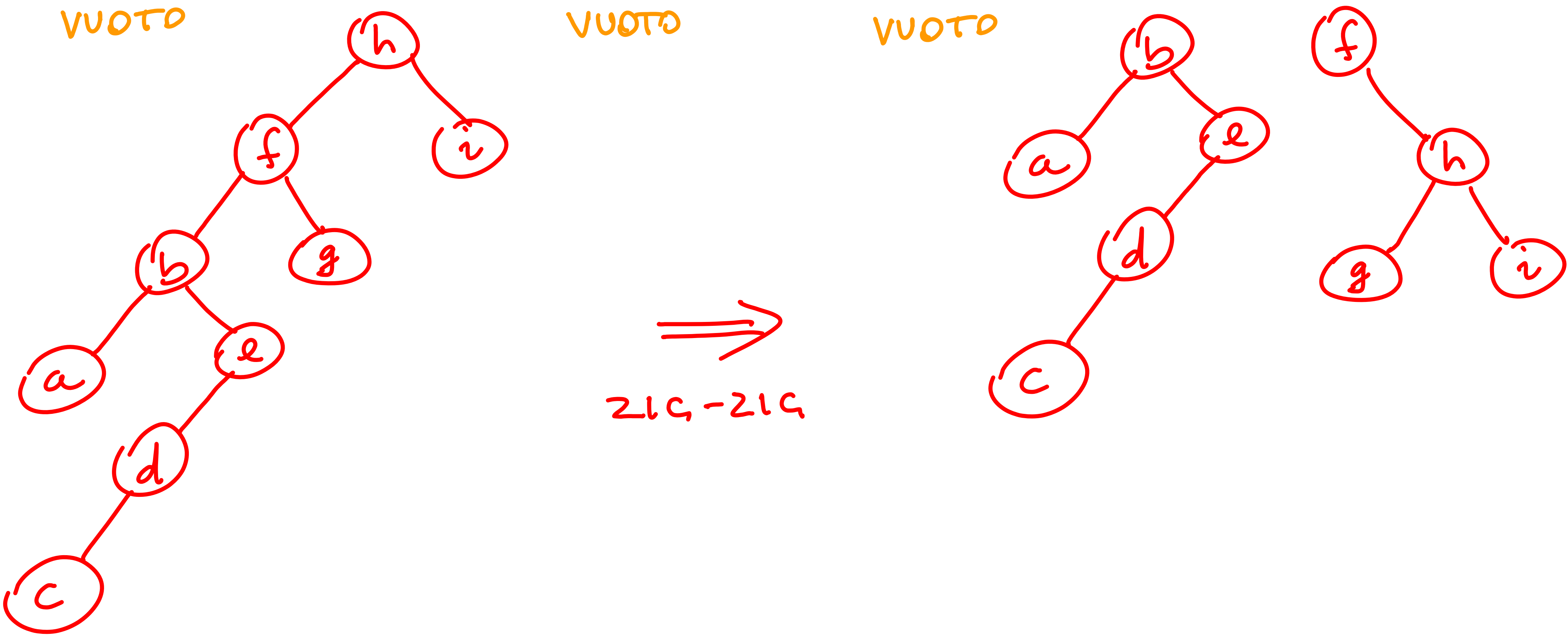
SPLAY (19)



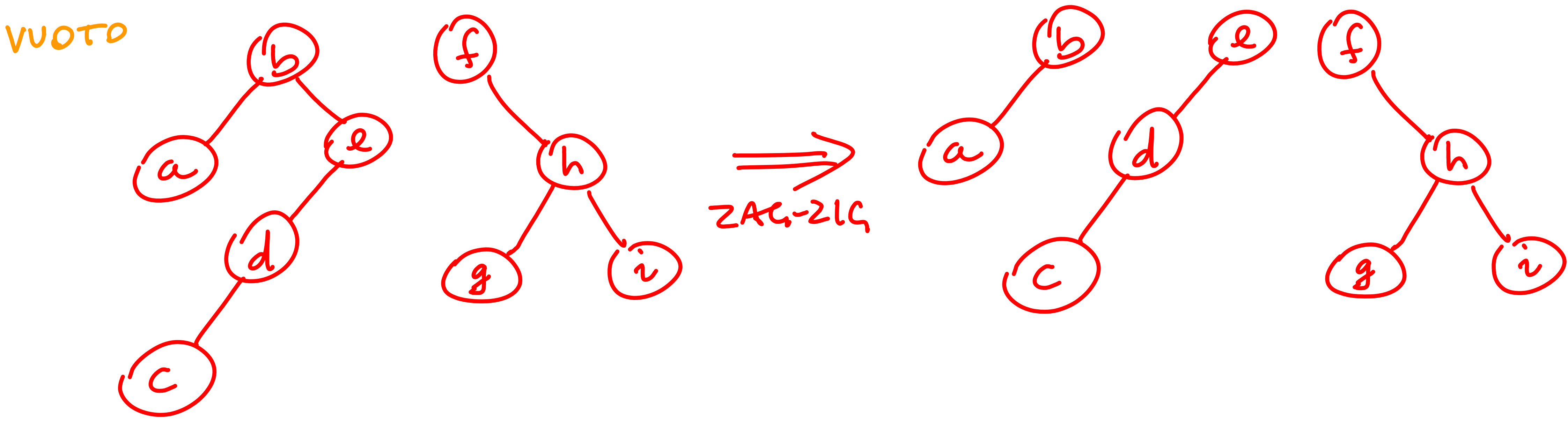
RIASSEMBLAGGIO



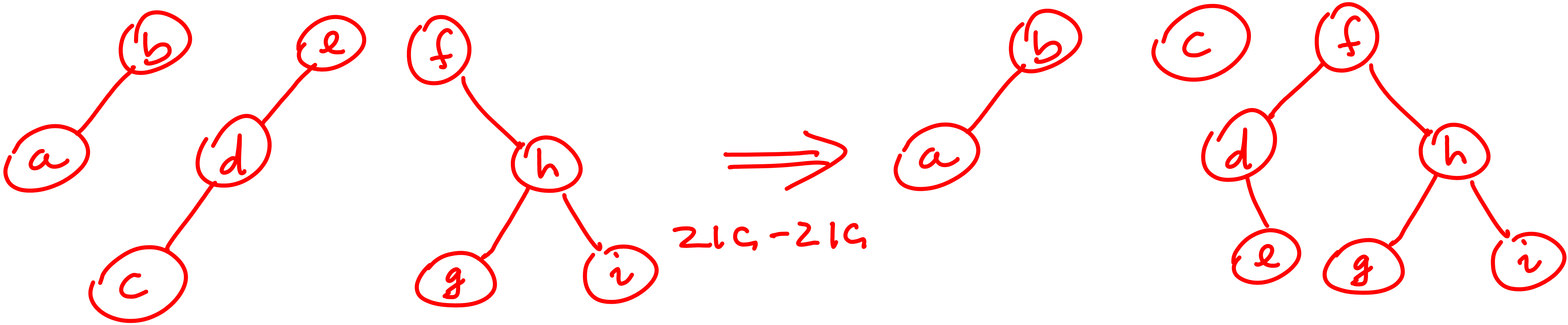
ESEMPIO 2: SPLAY (c)



ESEMPIO 2: SPLAY (c)



ESEMPIO 2: SPLAY (c)



ESEMPIO 2: SPLAY (c)